

Gleichungssysteme

Galip Turan

3 Lösungsverfahren

- Gleichsetzungsverfahren
- Substitutionsverfahren
- Eliminationsverfahren

Allgemeine Regeln

1. Zeilen dürfen vertauscht werden
2. Auf beiden Seiten darf eine Zahl addiert oder subtrahiert werden
3. Eine Gleichung darf mit einer von null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert werden.
4. Zu einer Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

Gleichsetzungsverfahren

Beispiel:

$$y = -4x + 23$$

$$y = 3x - 12$$

da ich zwei Mal „y“ habe, kann ich die Gleichungen gleichsetzen !

$$-4x + 23 = 3x - 12$$

und jetzt kann ich die Gleichung auflösen...

$$-4x + 23 = 3x - 12 \quad | +12$$

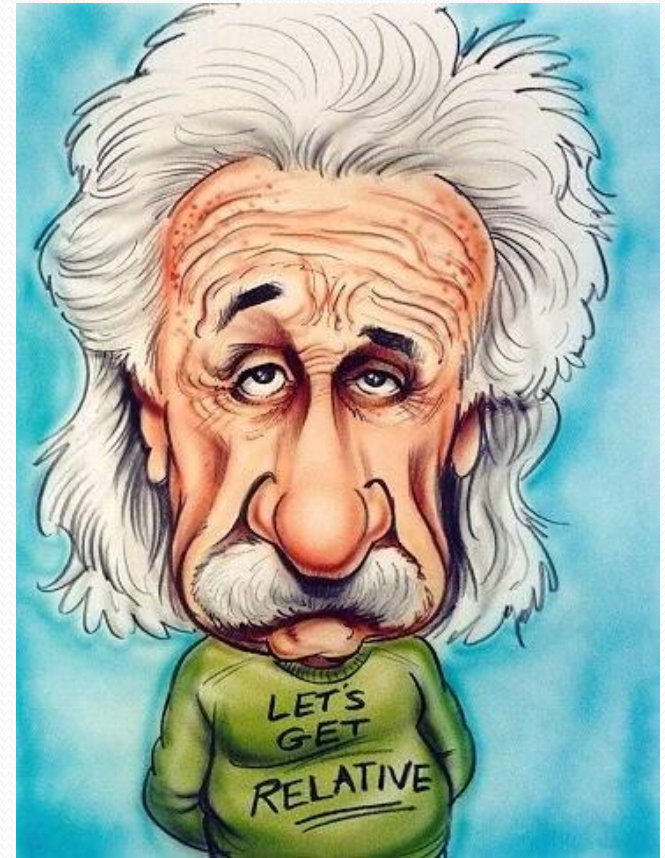
$$-4x + 35 = 3x \quad | +4x$$

$$35 = 7x \quad | /7$$

$$5 = x$$

Setzt man in y ein, so erhält man: $y = 3 \cdot 5 - 12 = 15 - 12 = 3$.

$$y = 3$$



Substitutionsverfahren

Beispiel:

$$\text{I : } 3x - 2y = 5$$

$$\text{II: } 2x + 5y = 16$$

Man löst eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen auf und setzt den dafür erhaltenen Term für diese Variable in die andere Gleichung ein.

Wir lösen jetzt die 2. Gleichung nach x auf.



$$\begin{array}{lcll} \text{II:} & 2x + 5y & = 16 & | - 5y \\ & 2x & = 16 - 5y & | /2 \\ & x & = 8 - \frac{5}{2} y & \end{array}$$

Den für „x“ erhaltenen Term setzen wir in die erste Gleichung ein und lösen nach „y“!

$$\begin{aligned} \text{I : } \quad 3x - 2y &= 5 \\ 3 * (8 - \frac{5}{2} y) - 2y &= 5 \end{aligned}$$



jetzt multiplizieren wir 3 mit der Klammer...

$$\begin{aligned} \text{I : } \quad 24 - \frac{15}{2}y - 2y &= 5 & | * 2 \\ 48 - 15y - 4y &= 10 & | - 48 \quad \text{und } y \text{ zusammenfassen} \\ -19y &= -38 & | / (-19) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

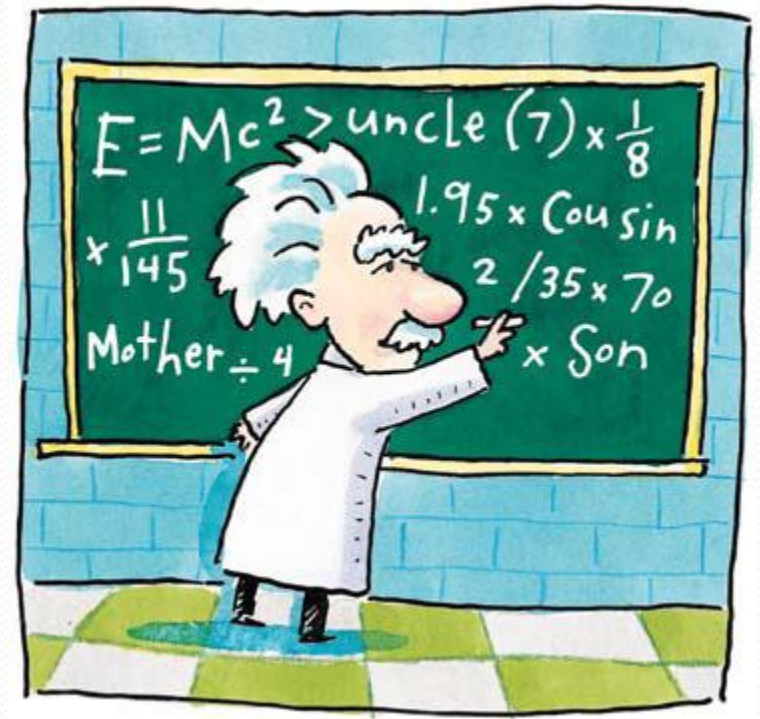
nun können wir auch „x“ ausrechnen

Wir setzen nur mehr ein ...

$$x = 8 - \frac{5}{2} y$$

$$x = 8 - \frac{5}{2} * 2$$

$$x = 3$$



Eliminationsverfahren

Beispiel:

$$\text{I} \quad : \quad x - y + 2z \quad = 5$$

$$\text{II} \quad : \quad 3x + 2y + z \quad = 10$$

$$\text{III} \quad : \quad 2x - 3y - 2z \quad = -10$$

Vorgang

$$\text{I} \quad : \quad x - y + 2z = 5$$

$$\text{II} \quad : \quad 3x + 2y + z = 10$$

$$\text{III} \quad : \quad 2x - 3y - 2z = -10$$

Zuerst wird „x“ zwei Mal eliminiert,
Man bekommt ein neues Gleichungssystem
I* und II*, das nur mehr y und z enthält.

Danach wird y eliminiert und man
kann z berechnen.



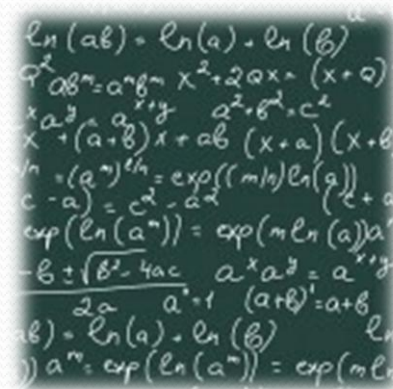
„x“ eliminieren:

1. Schritt: x wird aus I und II eliminiert

Im ersten Schritt wird die erste Gleichung mit (-3) multipliziert !

$$\begin{array}{l} \text{I :} \\ \text{II :} \end{array} \quad \begin{array}{l} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} *(-3) \\ \end{array} \right.$$

$$(-3)^* \text{ I: } -3x + 3y - 6z = -15$$



Es wird * (-3) gerechnet, da bei der zweiten Gleichung „3x“ vorhanden ist und wir diese Variable eliminieren wollen.

2. Schritt:

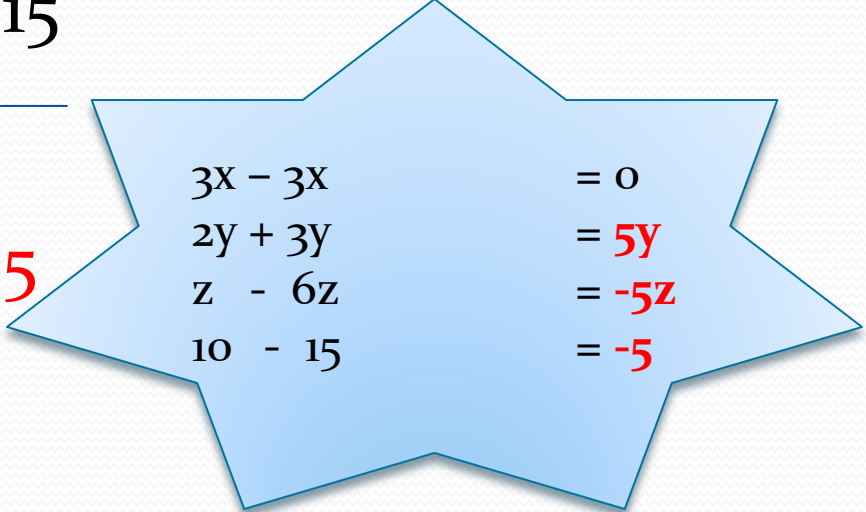
Im zweiten Schritt wird die Gleichung „I“ und die Gleichung „II“ addiert ! $(-3)^*I + II$

$$II : \quad 3x + 2y + z = 10$$

$$(-3)^* I : \quad -3x + 3y - 6z = -15$$

Diese Gleichung nennen wir

$$I^* : \quad 5y - 5z = -5$$



$3x - 3x$	$= 0$
$2y + 3y$	$= 5y$
$z - 6z$	$= -5z$
$10 - 15$	$= -5$

3. Schritt: x wird aus I und III eliminiert

In diesem Schritt multiplizieren wir die erste Gleichung mit der Zahl „(-2)“!

$$\begin{array}{l} \text{I :} \quad x - y + 2z = 5 \quad | \cdot (-2) \\ \text{III :} \quad 2x - 3y - 2z = -10 \\ \hline (-2)^* \text{ I :} \quad -2x + 2y - 4z = -10 \end{array}$$

Es wird $\cdot (-2)$ gerechnet, da bei der dritten Gleichung „ $2x$ “ vorhanden ist und wir diese Variable eliminieren wollen.

4. Schritt:

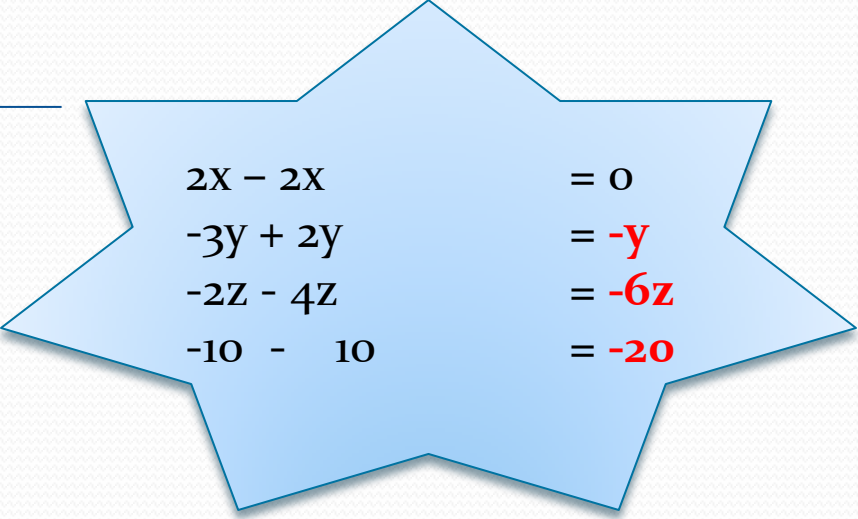
Jetzt wird die erste Gleichung und die dritte Gleichung addiert ($III + (-2)*I$)

$$III : 2X - 3y - 2Z = -10$$

$$\underline{(-2)*I : -2X + 2y - 4Z = -10}$$

Diese Gleichung nennen wir

$$II^* \quad -y - 6Z = -20$$



$2X - 2X$	$= 0$
$-3y + 2y$	$= -y$
$-2Z - 4Z$	$= -6Z$
$-10 - 10$	$= -20$

5. Schritt:

In diesem Schritt multiplizieren wir die Gleichung II* (Schritt 4: $-y - 6z = -20$) mit der Zahl „5“!
ACHTUNG: Wir multiplizieren die ZWEITE Gleichung nicht die ERSTE !!

$$I^* : \quad 5y - 5z = -5$$

$$II^* : \quad -y - 6z = -20$$

$$-y - 6z = -20 \quad | \cdot 5$$

Es wird $\cdot 5$ gerechnet, da bei der Gleichung I* „5y“ vorhanden ist und wir die Variable y eliminieren wollen.



6. Schritt:

Jetzt werden die beiden Gleichungen addiert ($I^* + 5II^*$):

$$I^* : \quad 5y - 5z = -5$$

$$5 II^* : -5y - 30z = -100$$

$$-35z = -105$$

7. Schritt:

Nun können wir „z“ ausrechnen !

$$-35z = -105 \quad | \quad * (-1)$$

$$35z = 105 \quad | \quad / 35$$

$$z = 3$$

8. Schritt:

Nun können wir auch „y“ ausrechnen, indem wir z in I* einsetzen !

$$\begin{array}{rcll} 5Y - 5 \cdot 3 & = & -5 & \\ 5Y - 15 & = & -5 & | +15 \\ 5Y & = & 10 & | :5 \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{2} & \end{array}$$

9. Schritt:

Zuletzt rechnen wir unsere letzte Variable „x“ aus ! Da setzen wir in die erste ursprüngliche Gleichung ein !

$$x - y + 2z = 5$$

$$x - 2 + 2 \cdot 3 = 5 \quad | +2 - 6$$

$$x = 1$$

Somit haben wir uns alle Variablen ausgerechnet !

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

