Lineare Optimierung

Nakkiye Günay,
Jennifer Kalywas &
Corina Unger

Jetzt erkläre ich euch die einzelnen Schritte und gebe Tipps!

Beispiel: Es sind zwei Maschinen (A und B) vorhanden, es gibt zwei Montageplätze (A: 4 h und 1 h; B: 2 h und 2 h), der Gewinn/Stk beträgt für A € 600,-, für B € 400,-. Jedoch dürfen beim Montageplatz 1 max. 40 h und bei Montageplatz 2 max. 28 h gearbeitet werden.

Hier ist einmal die Angabe. Der erste Schritt ist es, diese Angabe in eine Tabelle zu schreiben, da dann die nächsten Schritte einfacher sind. Am besten ist es, man schreibt die beiden Geräte in die Spaltenüberschriften.

	Maschine A	Maschine B	Verfügbare Zeit
Montageplatz 1	4 h	2 h	40 h
Montageplatz 2	1 h	2 h	28 h
Gewinn/Stk.	€ 600,-	€ 400,-	

Unser Ziel ist es, den Gewinn zu maximieren. Die Frage lautet also nun: Wie viele Maschinen von A und B müssen pro Woche hergestellt werden, damit der Gewinn maximal wird?

So sollte es nun ausschauen.

	Maschine A	Maschine B	Verfügbare Zeit
Montageplatz 1	4 h	2 h	40 h
Montageplatz 2	1 h	2 h	28 h
Gewinn/Stk.	€ 600,-	€ 400,-	

- Zielfunktion/Gewinnfunktion:
  $G(x,y) = 600x+400y$ => Maximum!

- Nebenbedingungen:

I $4x+2y\leq40$

II $1x+2y\leq28$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Jetzt setzt man für A ein x und für B ein y ein. Die Formeln werden von links nach recht aufgeschrieben, weshalb sich diese Tabellenform sehr gut für den Ansatz eignet.
Das Ziel ist es, den Gewinn zu maximieren, jedoch gibt es noch zusätzliche Bedingungen – Nebenbedingungen, auf die man achten muss.

- Nebenbedingung 1:
- $4x + 2y = 40$ /$-4x$
- $2y = -4x + 40$ /:2
- $y = -2x + 20$
  ($y = k + d$!)

- Nebenbedingung 2:
- $1x + 2y = 28$ /$-1x$
- $2y = -1x + 28$ /:2
- $y = ½ x + 14$

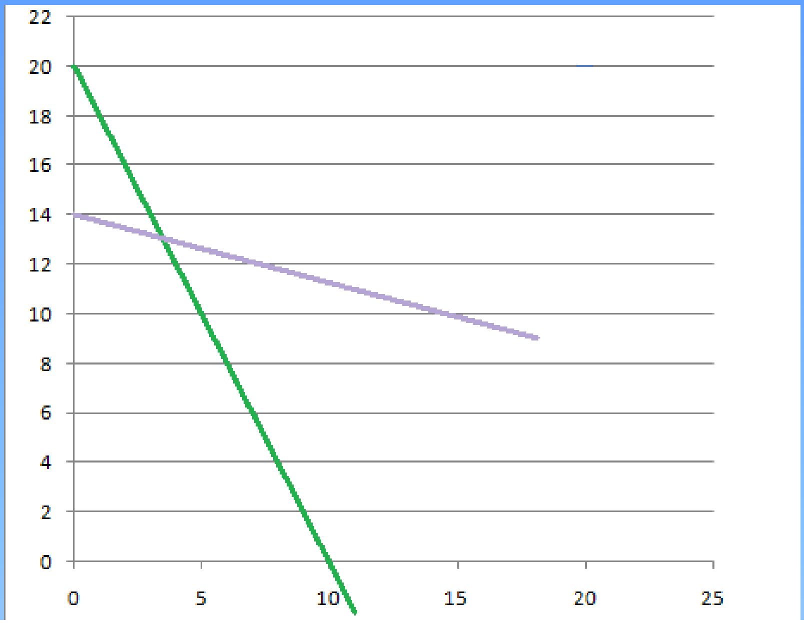
Nun kommen wir zur grafischen Lösung, dazu müssen wir zuerst die Nebenbedingungen so umformen, dass daraus Grenzgeraden werden.

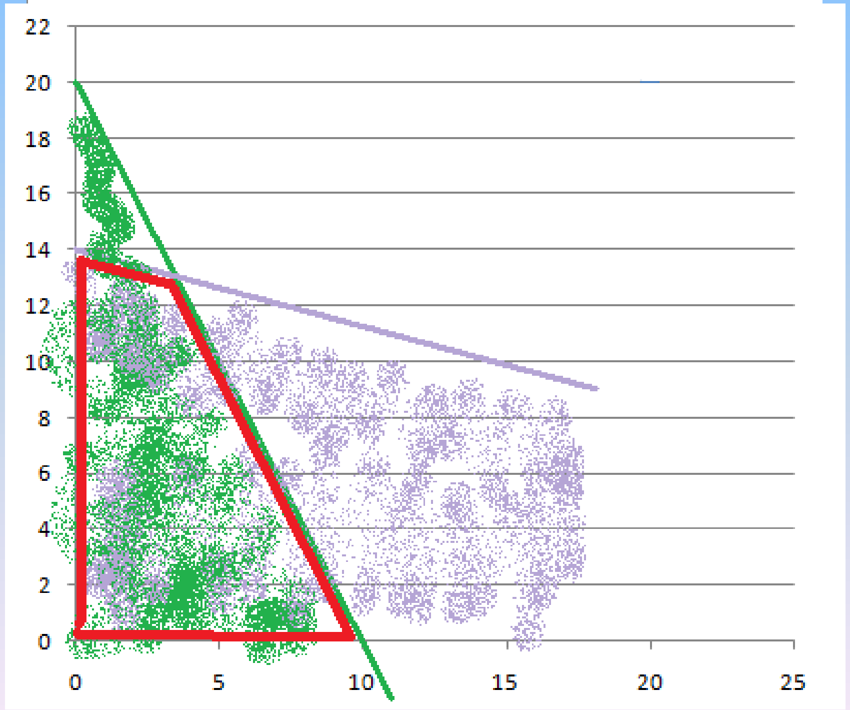
Nebenbedingung 1:

- $4x + 2y \leq 40$
- $4 * 0 + 2 * 0 \leq 40$
- $0 \leq 40$ wahre Aussage (w. A.)

- Nebenbedingung 2:
- $1x + 2y \leq 28$
- $1 * 0 + 2 * 0 \leq 28$
- $0 \leq 28$ w. A.

Um festzustellen, welche Halbebenen durch die Ungleichungen gegeben sind, setzt man am besten den Nullpunkt ein. Ergibt sich eine wahre Aussage, ist der Nullpunkt in der entsprechenden Halbebene enthalten, ergibt sich eine falsche Aussage, handelt es sich um die Halbebene, die den Nullpunkt nicht enthält.





Jetzt werden die Grenzgeraden der Nebenbedingungen gezeichnet. In unserem Fall bedeutet die wahre Aussage, dass jeweils die Flächen den Ursprung (0/0) enthalten. Jetzt sucht man die gemeinsame Fläche, da in dieser das mögliche Ergebnis liegen muss und kennzeichnet diese (rot).

- Zielfunktion:

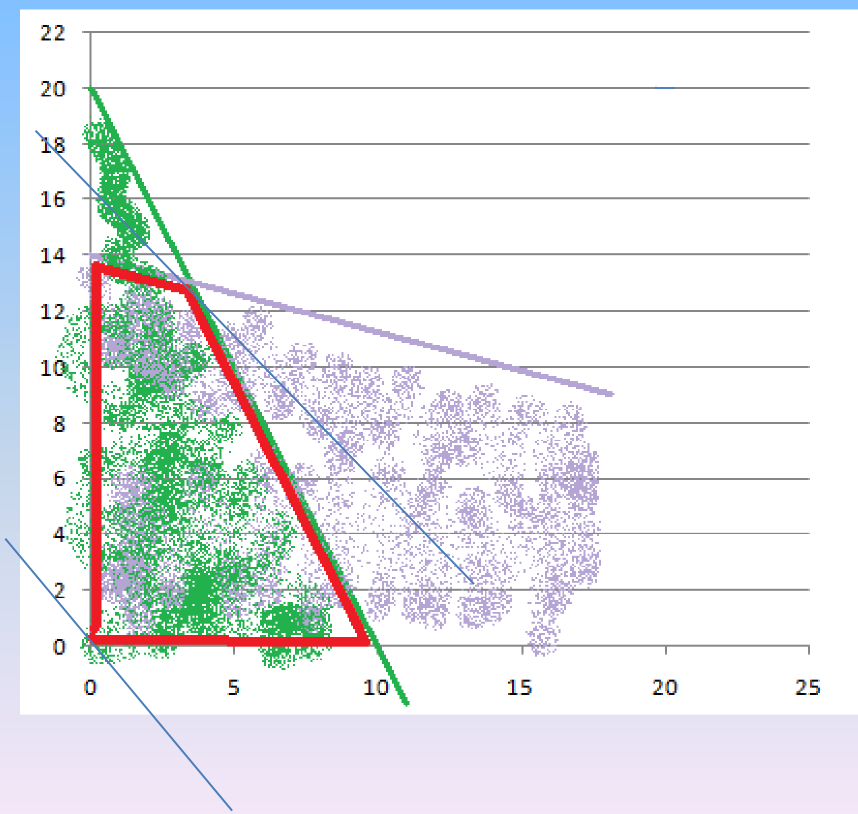
$G(x,y) = 600x + 400y \quad /-600x$

$-600x + G(x,y) = 400y \quad /:400$

$-\frac{3}{2}x + G(x,y)/400 = y$

Muss maximal werden, da der Gewinn maximiert wird!

Nun wird auch die Zielfunktion in die Hauptform y=kx+d umgeformt und im Nullpunkt eingezeichnet. Man verschiebt nun die Gerade so lange parallel nach oben, bis man den äußersten Punkt des Vierecks erreicht hat!



I $4x + 2y = 40$

II $1x + 2y = 28$ $\quad /\cdot(-1)$

I $4x + 2y = 40$

II $-1x - 2y = -28$

$3x = 12$ $\quad /:3$

$\underline{x = 4}$

Um die Lösung genau zu bestimmen, muss man den Schnittpunkt der beiden Grenzgeraden berechnen. Wir eliminieren y und berechnen x.

I $\quad 4x + 2y = 40$

$$4 * 4 + 2y = 40$$

$$16 + 2y = 40 \qquad / -16$$

$$2y = 24 \qquad / :2$$

$$\underline{y = 12}$$

Nun wird x bei einer von beiden Nebenbedingungen eingesetzt, um y zu berechnen.

$$G(x, y) = 600x + 400y$$

$$G(4, 12) = 600 * 4 + 400 * 12$$

$$G(4, 12) = 2400 + 4800$$

$$G(4, 12) = 7200$$

Das heißt nun, dass unser Schnittpunkt (4/12) ist. Nun setzen wir diese Zahlen in die Zielfunktion ein.

I $4x + 2y = 40$

$4 * 4 + 2 * 12 = 40$

$16 + 24 = 40$

$40 = 40$ keine Restkapazitäten

II $1x + 2y = 28$

$1 * 4 + 2 * 12 = 28$

$4 + 24 = 28$

$28 = 28$ keine Restkapazitäten

Als letztes schauen wir noch, ob es Restkapazitäten gibt. Dies wird so berechnet: man nimmt die Nebenbedingungen und setzt (4/12) ein.

Das haben wir natürlich erwartet, da ja der Schnittpunkt auf beiden Geraden liegt!

Die letzten Berechnungen zeigen nun Folgendes:

Man muss 4 Stück von Maschine A und 12 Stück von Maschine B erzeugen, der maximale Gewinn beträgt € 7200,-. Es gibt keine Restkapazitäten.

Das war eine Lineare Optimierung.
Bis zum nächsten Mathe-Unterricht.