Einführung Differentialrechnung

Marcus Dokulil

Inhalt

- Differenzenquotient
- Differentialquotient
- 1. u. 2. Ableitung
- Kurvendiskussion
  - Nullpunkt
  - Extremstellen
  - Wendepunkt
- Newtonsches Näherungsverfahren

Differenzenquotient

Formel

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Steigung bzw. die mittlere Änderung der Formel in einem bestimmten Intervall pro Einheit an.

Beispiel

Betrachten wir die Tagestemperatur in Wien

			x Tageszeit	y Temperatur			
		x1	8	9	y1		
Дx=x2-x1	2=10-8					11-9=2	y2-y1=Дy
		x2	10	11	y2		
		x1	12	19	y1		
	2=14-12					23-19=4	
		x2	14	23	y2		

$$k1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{11-9}{10-8} = \frac{2}{2} = 1$$

$$k2 = \frac{23-19}{14-12} = \frac{4}{2} = 2$$

Differentialquotient

Formel

Steigung der Sekante:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}$$

Steigung der Tangente:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \text{(Steigung der Sekante)}$$

Der Differentialquotient ist definiert als Grenzwert eines Differenzenquotienten in einem Intervall

Beispiel

x	y=x²
1	$1=1^2$
$1+\Delta x$	$(1+\Delta x)^2$

$y=x^2$; $x=1$

Steigung der Sekante:

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}$$

$$k=\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+\Delta x-1}=\frac{\cancel{1}+2\Delta x+\Delta x^2-\cancel{1}}{\cancel{1}+\Delta x-\cancel{1}}=\frac{\Delta x^2+2\Delta x}{Дx}=\frac{\cancel{\Delta x}*(\Delta x+2)}{\cancel{\Delta x}}$$

$k=\Delta x+2$

Steigung der Tangente:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x) = 2+0 = 2$$

1. u. 2. Ableitung

Formel für Potenzen

$y = a * x^n$

$y' = a * n * x^{n-1}$

$y'' = a * n * (n-1) * x^{n-1-1}$

Die Ableitungen benötigt man für die Kurvendiskussion. Wobei man beachten muss, dass y' gleich der Steigung der Tangente ist.

Beispiel

$y=x^7$

$y'=7*x^6$

$y''=7*6*x^5$

$y=x^2+3x+5$

$y'=2*x^1+3*1+0$

$y''=2*1+0$

Man muss beachten, dass die Ableitung von x 1 ist und dass die Ableitung der „normalen Zahlen“, wie z.B. 5, 0 ist.

Kurvendiskussion

Beispiel Nullstellen

$y = x^3+4x^2+4x$

Nullstelle/N: $y=0$ $\quad x(x^2+4x+4)=0$

$x=0$ und

$0=1x^2+4x+4$ ← quadratische Funktion

$$0=\underset{a}{1}x^2+\underset{b}{4}x+\underset{c}{4}$$

$${}_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2*a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4*1*4}}{2*1} = \frac{-4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4+0}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-4-0}{2} = -2$$

N1 (0/0), N2 (-2/0)

Beispiel Extremstellen

$y = x^3+4x^2+4x$

Extremstellen: $y'=0$ und

Minimum/Min $y'' > 0$

Maximum/Max $y'' < 0$

$y'=3x^2+4*2x+4$

$y''=3*2x+4*2*1$

$0=3x^2+4*2x+4 \leftarrow$ quadratische Funktion

$$_1x_2=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4*a*c}}{2*a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4*3*4}}{2*3} = \frac{-8 \pm 0}{6}$$

$$_1x_2 = \frac{-8+0}{6} = -0{,}67$$

da der Wert unter der Wurzel 0 ist, gibt es nur eine Lösung!

$y(-0{,}67)=(-0{,}67)^3+4*(-0{,}67)^2+4*(-0{,}67)=-1{,}19$

$y''(-0{,}67)=3*2*(-0{,}67)+8=4 < 0 \leftarrow$ MIN

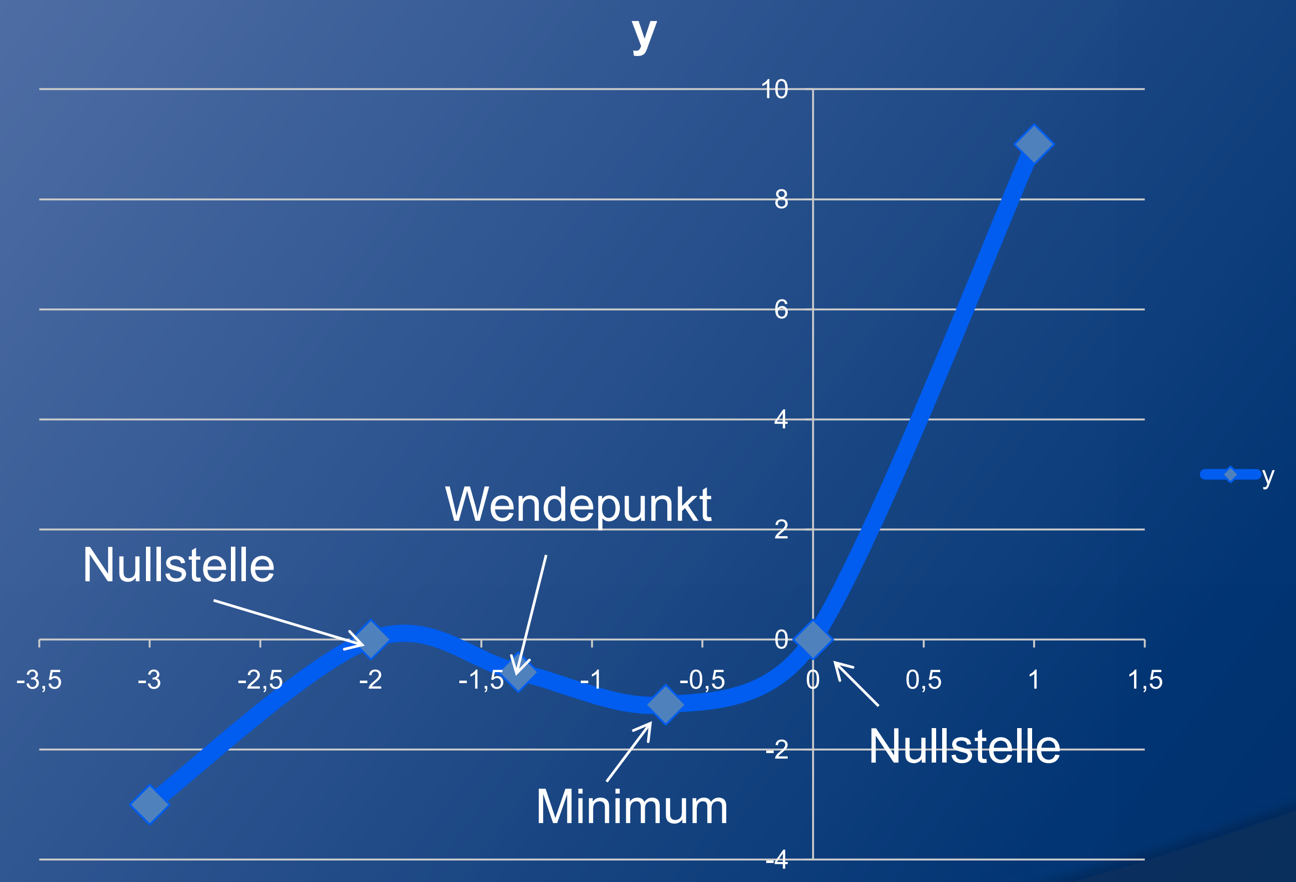
MIN $(-0{,}67/-1{,}19)$

Beispiel Wendepunkt

$y= x^3+4x^2+4x$
Wendepunkt: $y'' =0$

$y'=3x^2+4*2x+4$
$y''=3*2x+4*2*1 = 6x+8$
$6x+8=0$
$6x=-8$
$x=-1{,}33$ in y einsetzen:
$y=(--1{,}33)^3+4(-1{,}33)^2+4*(-1{,}33)=-0{,}59$
W(-2/0)

Wie sieht diese Funktion aus?



Newtonsches Näherungsverfahren

Formel/Beispiel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)}$$

Beim Newtonschen Näherungsverfahren wird die Tangente in der Nähe der Nullstelle bestimmt und die Nullstelle der Tangente als Näherungslösung der Nullstelle der Funktion verwendet

Beispiel

$x^3=3*(x+1)$; Beweis, dass $X_0= 2,1$ die Nullstelle ist:

$x^3=3*(x+1)$ / $-x^3$

$0=3*(x+1)-x^3$

$y=x^3+3x+3$

$y'=3x^2+3$

$$X_1=2,1-\frac{2,1^3+3*2,1+3}{3*2,1^2+3} = 2,1$$

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT